Correction exo

Pour rappel : soient $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On considère le système paramétré suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccl} ax & + & y & + & z & = \alpha \\ x & + & ay & + & z & = \beta \\ x & + & y & + & az & = \alpha + \beta \end{array}\right.$$

Question 1

Ce système est équivalent à l'équation matricielle suivante :

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

Question 2

Pour savoir pour quelles valeurs de a la matrice est inversible, on applique l'algorithme de Gauss.
Pour rappel, on ne peut avoir que des pivots constants lors de l'échelonnement.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - aL_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Ici, les deux lignes suivantes ne continennent pas de constantes en position pivotale.
On doit donc supposer $a \neq 1$.

On a alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2/(a-1)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix}$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3/(1-a)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2+a \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour avoir tout les pivots différents de 0, il faut également $a \neq -2$.

On en déduit donc que, pour que A soit inversible, il faut $\boxed{\boldsymbol{a \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}}}$.

Question 3 – a

La matrice augmentée $\widetilde{A} = A|I_3$ est :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Question 3 – b

On se place dans le cas $a \neq -2$ et $a \neq 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftrightarrow L_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\text{Début Q2}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1 & 0 & -a \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1 & 1 & -1-a \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -1 \times L_3}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a^2+a-2 & -1 & -1 & a+1 \end{array}\right)$$

On remarque que $a^2 + a - 2 = (a-1)(a+2)$, ce qui est cohérent avec nos suppositions. Ici, pour simplifier les calculs, on va rendre tous les pivots égaux et éviter les fractions.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) & -1 & -1 & a+1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\text{Pivots égaux}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} (a-1)(a+2) & (a-1)(a+2) & a(a-1)(a+2) & 0 & 0 & (a-1)(a+2) \\ 0 & (a-1)(a+2) & -(a-1)(a+2) & 0 & a+2 & -(a+2) \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) & -1 & -1 & a+1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} (a-1)(a+2) & (a-1)(a+2) & a(a-1)(a+2) & 0 & 0 & a^2+a-2 \\ 0 & (a-1)(a+2) & 0 & -1 & a+1 & -1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) & -1 & -1 & a+1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} (a-1)(a+2) & 0 & a(a-1)(a+2) & 1 & -(a+1) & a^2+a-1 \\ 0 & (a-1)(a+2) & 0 & -1 & a+1 & -1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) & -1 & -1 & a+1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - a \times L_3}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} (a-1)(a+2) & 0 & 0 & a+1 & -1 & -1 \\ 0 & (a-1)(a+2) & 0 & -1 & a+1 & -1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) & -1 & -1 & a+1 \end{array}\right)$$

On en déduit donc

$$\boxed{\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{a+1}{(a-1)(a+2)} & \frac{-1}{(a-1)(a+2)} & \frac{-1}{(a-1)(a+2)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \frac{-1}{(a-1)(a+2)} & \frac{a+1}{(a-1)(a+2)} & \frac{-1}{(a-1)(a+2)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \frac{-1}{(a-1)(a+2)} & \frac{-1}{(a-1)(a+2)} & \frac{a+1}{(a-1)(a+2)} \end{array}\right)}$$

Question 3 – c

On déduit la matrice A^{-1} en lisant la matrice de droite de la matrice augmentée :

$$A^{-1} = \frac{1}{(a-1)(a+2)} \begin{pmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & -1 \\ -1 & -1 & a+1 \end{pmatrix}$$

Question 4

On reprend l'équation matricielle de notre système :

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Question 5

Puisque nous avons obtenu une expression directe des solution, il suffit d'effectuer le produit matriciel.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha+\beta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & -1 \\ -1 & -1 & a+1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a\alpha-2\beta \\ a\beta-2\alpha \\ a\alpha+a\beta \end{pmatrix} \end{array} \implies A^{-1}B = X = \frac{1}{(a-1)(a+2)} \begin{pmatrix} a\alpha-2\beta \\ a\beta-2\alpha \\ a\alpha+a\beta \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{x = \frac{a\alpha-2\beta}{(a-1)(a+2)}} \\ \boldsymbol{y = \frac{a\beta-2\alpha}{(a-1)(a+2)}} \\ \boldsymbol{z = \frac{a\alpha+a\beta}{(a-1)(a+2)}} \end{cases}}$$

Question 6

On reprend l'échelonnement mais en considérant cette fois si uniquement les valeurs $a = -2$ et $a = 1$ et la matrice augmentée coefficient/seconds membres.

On reprend les matrices trouvés dans la question 2 avant de supposer des valeurs pour a et on fait, eventuellement sur un brouillon, les opération sur les seconds membres.

En premier, on a :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & \alpha+\beta \\ 0 & a-1 & 1-a & -\alpha \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & (1-a)\alpha - a\beta \end{array}\right)$$

On se place donc dans le cas $a = 1$, la matrice devient alors :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha+\beta \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \end{array}\right)$$

De façon évidente, si $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$, il n'y a pas de solution, sinon, si $\alpha = \beta = 0$, alors on a $x + y + z = 0$ et une infinité de solution.

Prenons l'autre matrice trouvée dans la question 2 qui nous a ammené à faire une supposition sur a :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & \alpha+\beta \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{\alpha}{a-1} \\ 0 & 0 & 2+a & -\frac{\alpha+\beta}{1-a} \end{array}\right)$$

On se place donc dans le cas $a = -2$, la matrice devient alors :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & \alpha+\beta \\ 0 & 1 & -1 & \frac{\alpha}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha+\beta}{3} \end{array}\right)$$

Ainsi, si $\alpha \neq -\beta$, alors il n'y a aucune solution, sinon, on obtiens :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{\alpha}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ce qui nous donne, une fois mis sous forme de système :

$$\begin{cases} x+y-2z = 0 \\ y - z = \frac{\alpha}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z - \frac{\alpha}{3} \\ y = z + \frac{\alpha}{3} \end{cases}$$

Question 6 – a

Pour $a = 1$ et $\alpha = \beta = 0$:

$$\boxed{\boldsymbol{S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z = 0\}}}$$

Pour $a = -2$ et $\alpha = -\beta$:

$$\boxed{\boldsymbol{S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = z - \frac{\alpha}{3} \wedge y = z + \frac{\alpha}{3}\}}}$$

Question 6 – b

Pour ($a = 1$ et $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$) ainsi que pour ($a = -2$ et $\alpha \neq -\beta$)

Question 7 – Bonus

On remarque que pour $a = 1$ et $a = -2$, $\det(A) = 0$. En effectuant des divisions euclidiennes, on remarque même que $\det(A) = (a+2)(a-1)^2$

On peut en déduire que si une matrice est est inversible, alors son déterminant est différent de 0.

Il s'agit là d'une équivalence dûe à une propriété bien spécifique du déterminant que vous verrez en fin d'année.