Incertitudes

Fiche de rappel sur les notations et calculs des incertitudes

Dans cette fiche, on note les vecteurs en **gras** *et le produit vectoriel par* $\times$

Introduction sur les incertitudes

Lorsqu'on est en TP, il est impossible de mesurer de façon parfaite une donnée. Les incertitudes permettent d'estimer la dispersion autour de la valeur théorique que l'on cherche.

Ainsi, on notera toujours une mesure sous la forme :

$$X = (X_m \pm \mathrm{d}X_m)[X]$$

Avec X_m la valeur finale après mesures, $\mathrm{d}X_m$ l'incertitude de la mesure et $[X]$ l'unité de X.

Schématisation des incertitudes

Lorsqu'on trace des courbes, les incertitudes doivent être schématisées par des barres sur chacun des axes.

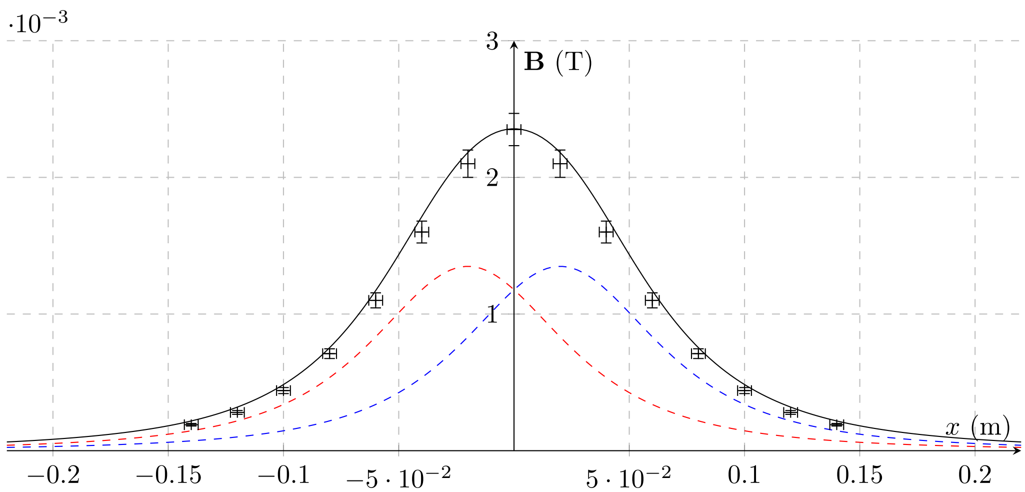

Figure 1 — Exemple de courbe avec incertitudes de mesure.

Types d'erreurs

En plus des incertitudes, il est intéressant de noter les types d'erreurs de mesures possibles pour pouvoir conclure sur son TP.

Il en existe deux types :

- **L'erreur aléatoire** : Elle décrit une mesure mal effectuée. Si le temps le permet, il faut alors refaire la mesure.
- **L'erreur systématique** : Elle décrit un biais dans la mesure, souvent due à un mauvais calibrage de l'appareil de mesure.

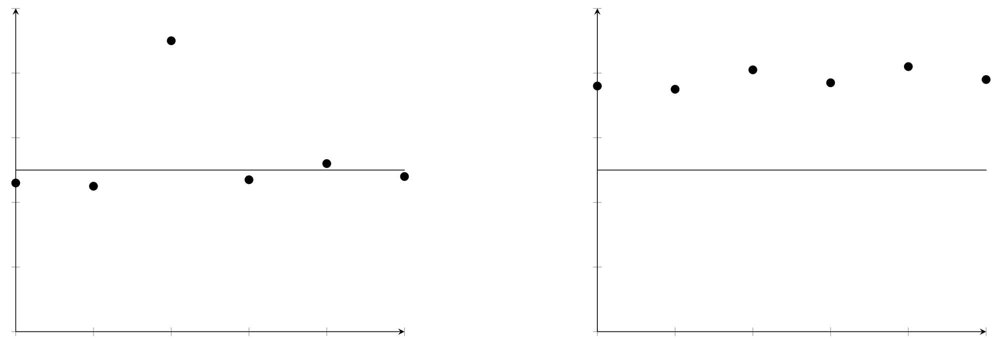

FIGURE 2 — Erreur aléatoire (à gauche) et erreur systématique (à droite).

Conclure sur les incertitudes et erreurs

Il est important de rappeler dans la conclusion de son compte rendu les différentes erreurs et la précision liée à ses mesures. Des incertitudes relativement faibles permettent d'appuyer la précision et le soin apporté à la manipulation.

Incertitude absolue et relative

Lorsqu'on parle d'incertitude, il en existe deux types, les incertitudes absolues, qui sont les plus complexes à calculer, et les incertitudes relatives définies par la formule suivante :

$$\mathrm{d}X_m = \rho X_m$$

Avec ρ une constante donnant l'indication du pourcentage d'incertitude relative.
Par exemple, si $\rho = 0.03$, on peut affirmer qu'il y a 3% d'incertitude relative et donc $X_m = 10$ cm $\implies \mathrm{d}X_m = 0.3$ cm.

Quand on parle d'incertitude relative, ce pourcentage ne varie pas en fonction de la valeur de la mesure.

Cas d'application

Typiquement, on sera amené à utiliser ces incertitudes pour des appareils de mesures. La valeur de ρ est alors indiqué sur l'appareil.

Par la suite, on ne va s'intéresser qu'aux incertitudes absolues.

Incertitude sur une même mesure répétée

Imaginons que nous souhaitions mesurer le temps t que met une balle à tomber d'une hauteur h.
Une méthode simple pour réduire l'incertitude est d'effectuer N mesures. Dans ce cas le calcul d'incertitude utilise les statistiques. La dispersion d'une donnée est exprimée par l'écart-type. On a donc :

$$\mathrm{d}X_m = \sqrt{\frac{1}{N}\sum (X_{m,i} - \overline{X_m})^2}$$

Avec N le nombre de mesures, $X_{m,i}$ chacune des mesures et $\overline{X_m}$ la moyenne des mesures.

Incertitudes sur les mesures indirectes

Cette partie utilise des notions d'analyse, un formulaire est mis à disposition à la fin au cas où.

Soit $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ et $X = f(\mathbf{x})$ une variable dont on souhaite obtenir la valeur mais que l'on ne peut pas mesurer directement. Il est cependant possible de mesurer les valeurs de x_1, ..., x_n à un état donné.
X est alors une fonction de plusieurs variables dont la mesure est indirecte.

On utilise alors **la loi de propagation des incertitudes**.

$$\mathrm{d}X_m = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_i \right)^2}$$

Qui peut être vu comme la norme euclidienne (norme 2) du gradient de f dont les composantes sont pondérées par les différentes incertitudes élémentaires $\mathrm{d}x_i$.

Ces incertitudes élémentaires sont soit données, dans le cas d'un appareil de mesure, soit choisies selon le bon sens. En général, on prend la graduation de l'instrument comme incertitude. S'il s'agit d'une règle graduée tout les 5mm, ce sera alors l'incertitude que l'on choisira.

Pourquoi le gradient ?

Supposons que nous ayons une variable $z = f(x, y)$ avec x et y deux variables qu'on peut mesurer directement.

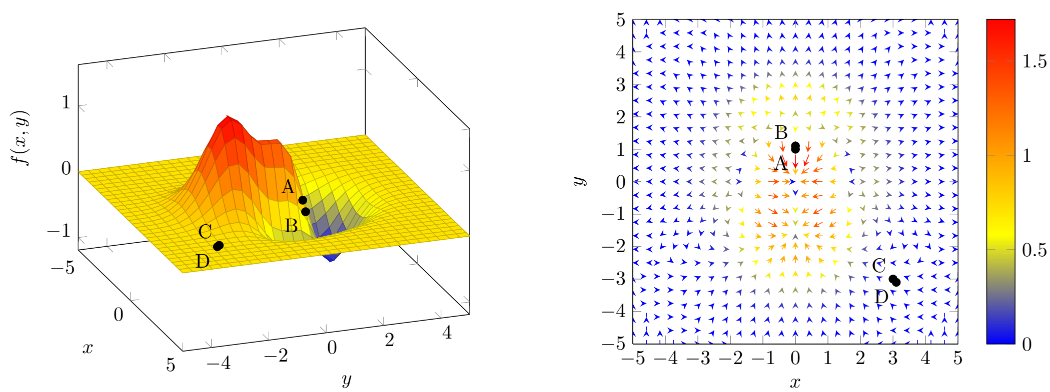

FIGURE 3 — Graphe de z (à gauche) et de son gradient ∇z (à droite).

Si on considère les points représentés sur le schéma, on se rend compte de la façon dont l'incertitude change selon les valeurs de mesures.

Projetés sur le plan xOy, les points A et B ne sont séparés que d'une distance de 0.1, pourtant $|z_A - z_B| \simeq 0.18$. Si on prend en compte que le maximum de la fonction est atteint en environ 1.4, c'est une grande différence.

C'est donc en ces points que la valeur d'incertitude est la plus grande pour la fonction. On y observe une forte pente et **un gradient dont la norme est la plus elevée**.

Les points C et D, bien que séparés d'une distance plus grande que A et B si projetés, n'impliquent que $|z_C - z_D| \simeq 1 \cdot 10^{-4}$. En ces points **le gradient est de norme quasi-nulle**.

En réalité, la raison derrière la loi de propagation des incertitudes est plutôt statistique, mais cette approche est plus visuelle et fonctionne assez bien pour la compréhension des incertitudes.

Cas d'application

Supposons que nous devions mesurer la pression à l'intérieur d'une seringue, graduée tout les 2 millilitres, sans manomètre. On suppose la quantité de matière constante égale à $4.5 \cdot 10^{-3}$ mol. On dispose d'un thermomètre indiquant la température de l'air à l'interieur de la seringue avec 0.1 °C d'incertitude.

On utilise alors la loi des Gaz Parfaits pour determiner l'incertitude sur la mesure de P.

$$PV = nRT \iff P = nR\frac{T}{V}$$

Ainsi, on en déduit :

$$\nabla P \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial T} \\ \dfrac{\partial P}{\partial V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{nR}{V} \\ -\dfrac{nRT}{V^2} \end{bmatrix} \implies \mathrm{d}P = nR\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}T}{V}\right)^2 + \left(\frac{T\mathrm{d}V}{V^2}\right)^2}$$

Avec $\mathrm{d}T = 0.1$ K et $\mathrm{d}V = 2 \cdot 10^{-6}$ m^3. On utilise toujours les unités S.I.

Erreur relative

Lorsque l'on connait la valeur théorique X_t que l'on est supposé atteindre (on dispose du modèle), il est possible de calculer l'écart à cette valeur, noté τ :

$$\tau = \frac{|X_t - X_m|}{X_t}$$

Un écart τ relativement faible (en dessous de 5%) permet d'appuyer ses résultats.

Formulaire condensé d'analyse

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction scalaire de plusieurs variables.

On appelle dérivée partielle de f par rapport à la variable x_i la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Pour obtenir son expression, on dérive f comme s'il s'agissait d'une fonction d'une seule variable en supposant toutes les autre variables que x_i constantes.

Ces dérivées partielles expriment la variation de f en fonction de la variable x_i.

Exemple : $f(x,y) = 2x^2 + xy + y^3 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x + y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 + x$

On appelle gradient de f le vecteur ∇f des dérivées partielles de f. C'est-à-dire :

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Le gradient exprime l'ensemble des variations individuelles de f en fonction de la variation de ses différentes variables.

Exemple : $f(x,y) = 2x^2 + xy + y^3 \implies \nabla f = \begin{bmatrix} 4x + y \\ 3y^2 + x \end{bmatrix}$