Exercice type partiel

Soient $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On considère le système paramétré suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccl} ax & + & y & + & z & = & \alpha \\ x & + & ay & + & z & = & \beta \\ x & + & y & + & az & = & \alpha+\beta \end{array}\right.$$

1. Réécrire ce système sous forme matricielle. On appellera A la matrice des coefficients, B la matrice des seconds membres et X la matrice des inconnues.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle inversible ?
3. On cherche l'inverse de A :
   (a) Poser la matrice $\widetilde{A} = A|I_3$
   (b) Effectuer l'échelonnement total de $\widetilde{A}$ pour les valeurs de a le permettant.
   (c) En déduire A^{-1}.
4. Exprimer X en fonction de B et de A^{-1}
5. En déduire l'ensemble des solutions du système pour (x, y, z) des solutions uniques.
6. Pour quelles valeurs de a, α et β a-t-on :
   (a) Une infinité de solution ?
   (b) Aucune solution ?
7. **Bonus** — On appelle déterminant de la matrice A la valeur $\det(A) = a^3 - 3a + 2$.
   Que remarque t-on sur cette valeur ?
   Que peut-on en déduire comme condition d'inversibilité pour une matrice ?